DEUXIÈME PARTIE

DEUXIÈME PARTIE

De cette conception sémantique de la vérité nous retiendrons d'abord la nécessité de la distinction qu'elle introduit, afin d'écarter le risque de paradoxe, entre le langage étudié, que nous appelons le langage objet, et le langage qui sert au commentaire, nous l'appelons le métalangage.

Le langage objet est construit comme un système isolé qui fait l'objet de l'étude du logicien.

La rationalité scientifique contemporaine est définie, pour le discours de la science d'aujourd'hui[1]*, du simple fait d'avoir isolé un langage objet spécifique, la logique canonique classique selon l'appellation proposée par A.Tarski*[2]*. Les lois qui obligent dans ce langage objet sont la vérifonctionnalité (calcul des propositions, algèbre des classes) et la théorie de la quantification (langage des prédicats)*[3]

---

[1] - Dans son ouvrage majeur K. Popper (*Logique de la découverte scientifique*, Payot, Paris 1973) situe très simplement la logique déductive et les mathématiques en dehors de son champ puisque son propos ne consiste qu'à s'opposer à la notion d'une logique inductive. S'il ne traite pas de logique déductive, il s'en sert comme d'une donnée dont dépend par conséquent son critère de scientificité, soit la démarcation qu'il propose de définir grâce à la réfutabilité d'une théorie scientifique par une théorie concurrente.

On a la fâcheuse habitude de considérer que la logique qui préside au métalangage de la science, des mathématiques, de la logique elle même, est toujours la logique canonique classique et l'on a tort.

Ce doit être un relief de l'idée de Hilbert qui, en sa métamathématique, supposait toujours une mathématique finitiste afin de pouvoir admettre l'infinitude dans la mathématique qui faisait l'objet de sa théorie de la démonstration . Il serait bon que l'on s'en rende compte.

[2] - W.V.O.Quine ne dit pas autre chose dans sa *Philosophie de la logique* (Aubier, Paris 1975). Il propose d'isoler ainsi un territoire rationnel pour sa simplicité et son élégance, ne présentant aucun paradoxe. Nous questionnons le bien fondé de cet acte isolationniste décisif.

[3] - Le lecteur trouvera un exposé technique et détaillé de la logique canonique classique dans W.V.O.QUINE *Méthodes de logique* Holt, Rinehart and Winston 1950, 1959 et 1972, Armand Colin - collection. U,

Paris 1972, un éloge et une défense de cette logique dans la *Philosophie de la logique* , Aubier, Paris 1975 , du même auteur.

I

LA LOGIQUE CANONIQUE CLASSIQUE

LE TRACTATUS LOGICO-PHILOSOPHICUS : le toutaimisme (résumé strict)

1. à 6. Le monde est toute les existences d'états de choses dont les tableaux logiques constituent les fonctions de vérité, de forme générale $[p,\xi,N(\xi)]$, de propositions élémentaires ayant un sens

7. Ce dont on ne peut parler, il faut le taire.

Chacun des deux chapitres de cette logique peut être construit comme une théorie écrite dans un langage qui lui est propre, en un double système génératif que l'on appelle un système formel[1]**.** Le premier système génératif produit les énonces du langage L, le second permet de déduire les thèses de la théorie T.

Un système génératif est constitué de caractères primitifs et de principes de composition, suivant ainsi la conception syntaxique mise en valeur par R.Carnap.

Nous ne développons ici que le calcul des propositions (soit la théorie de la vérifonctionnalité) écrit dans le langage L_2 par la théorie T_2, pour la portée très large de ce système et pour son statut élémentaire, afin de rester accessible, du même fait, au lecteur débutant.

---

[1] - R. M. Smullyan *Theory of Formal systems*, Princeton University Press, 1961. Nous avons vu, à propos de cette question, se dissoudre un cartel de logique (1993) qui mettait à l'épreuve la présente étude dans la visée de réaliser le fascicule de résultats n°0 de notre série. Un système formel peut même être concidéré comme un double système génératif, cette remarque ouvre la délicieuse question, à propos de la structure du langage, de la structure du signifiant, qui s'énonce sous la forme de la question : Est-ce un, est-ce deux?, formalisée par J.Lacan dans sa définition du signifiant grâce à l'expression "Est-ce un, est-ce deux?"

$$S_1 \rightarrow S_2\ ?$$

Nous avons regroupé les éléments formels dont nous aurons l'usage dans notre commentaire dans des annexes différentes placées à la fin de cet ouvrage après le dernier argument.

A partir d'ici, le lecteur qui ne connaît pas la construction formelle d'un langage et d'une théorie déductive, doit se reporter, à chaque instant, aux annexes afin d'y trouver les définitions précises que nous adoptons, des éléments dont nous traitons. .

Les autres nous suivent sans y recourir, mais il peuvent aussi aller vérifier quelques précisions à propos de ce à quoi nous faisons allusion.

Construction effective du calcul des propositions. (voir annexe 1 et 2)

Nous énumérons maintenant les différents étages de la construction que le lecteur peut reprendre à son compte en les effectuant et en se reportant aux annexes qui lui donnent les précisions nécessaires s'il ne les connaît pas.

(1) - Il y a, dans le langage de la logique, un premier système génératif purement grammatical où sont donnés les termes primitifs et les principes de formations des énoncés. Ceci nous conduit à la notion d'énoncés bien formés ou formules de notre langage objet. Nous parlerons du langage objet L_2 à propos de la multiplicité de ces formules. Le traitement de cette question doit déjà être formulé dans le métalangage L_{2+1}.[voir annexe n°1 - 1ère partie].

Les principes formatifs peuvent être transcrits en cellules élémentaires d'arbres [voir annexe n°2]. En composant ces cellules élémentaires, nous formons des arbres, comme en grammaire générative[1] afin de produire ces formules et du même coup leur analyse syntaxique qui nous servira par la suite.

Donnons quelques exemples d'énoncés biens formés de ce langage L_2

$$p,\ q,\ \neg p,\ (\neg p \vee q),\ (\neg p \vee (\neg q \vee p)),\ ....$$

Nous appellerons longueur de l'énoncé le nombre d'étage qui apparaît dans son arbre syntaxique. Nous résumerons la situation en indexant les connecteurs de la formule analysée par le chiffre de l'étage où ils apparaissent dans cet arbre. La longueur de l'énoncé est donner par le chiffre le plus élevé.

Donnons un exemple avec l'énoncé :

[1] - La notion de grammaire générative, développée par N.Chomsky, lui a été inspirée par cette pratique inventée par les logiciens.

$$\begin{array}{c} \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)) \\ 5\ \ 3\ \ 1\ \ \ 2\ \ \ \ 4\ 3\ \ \ 2\ 1 \end{array}$$

Cet énoncé est de longueur 5.

(1') - Nous introduirons des caractères abréviateurs afin de réduire la longueur des énoncés (voir annexe n°1). Voici des énoncés bien formés abrégés :

$$(p \wedge q), (p \Rightarrow q), (p \Leftrightarrow q), (p \not\Leftrightarrow q), (p \Rightarrow (q \Rightarrow p)),$$
$$((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)), ((p \Rightarrow \neg p) \vee (\neg p \Rightarrow p)), ...$$

(2) - Le travail du logicien mathématicien consiste à tenter de réduire à un traitement syntaxique la question de la vérité. Pour cela, il faut construire un deuxième système génératif, où sont donnés les axiomes et les principes déductifs. Ce qui conduit à la notion de démonstrations et de thèses (théorèmes) dans la théorie T_2 écrite dans le langage objet. Le traitement de cette question est formulé dans le métalangage. L_{2+1} [voir annexe n°1 - 3ème partie].

Nous adoptons dans le métalangage L_{2+1} un caractère qui indique qu'un énoncé bien formé P est une thèse: $\vdash$ P.

Donnons quelques exemples de thèses dans T_2 :

$$\vdash(\neg p \vee p),\ \vdash(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)), \vdash(\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)).$$

Nous parlerons de *démontrabilité*, à l'occasion de cet aspect de la détermination syntaxique de la vérité

Lorsque nous disposons d'une bonne définition de la démontrabilité nous commençons par étudier la *consistance* logique du système d'axiomes. Il existe trois critères plus ou moins forts de cette notion. Une seconde question nécessite alors notre attention avec la *complétude* logique relative à cette consistance. Il s'agit de savoir si l'adjonction du moindre axiome supplémentaire rend la théorie inconsistante selon les critères précédents. [voir annexe n°1 - 4ème partie, pour la définition de ces termes]

Ce type de questionnement se pose à l'occasion des deux étages de la logique canonique classique, celui du calcul des propositions et celui du langage des prédicats[1].

[1] - Nous avons choisi ici d'expliciter le calcul des propositions L_2 comme exemple résolument simple. Nous traiterons plus tard du langage des prédicats L_1

La logique canonique classique est consistante et complète[1] en vertu du critère le plus exigent. C'est même le seul domaine aussi cohérent et fondé que nous connaissions, ce pourquoi il conserve une fonction stratégique pour n'importe quel discours.

Nous ne développons pour l'instant que le calcul des propositions canonique L_2T_2 afin de rester dans un registre élémentaire pour les débutants et suffisamment fondamental pour notre démonstration.

Faisant partie de la logique canonique classique, ce système L_2,T_2 est donc a fortiori consistant et complet.

Mais, Théo...

La logique de ce temps, avec d'abord la logique de notre propre sous-développement culturel. Logique Sado-Kantique et Booléenne avec un grand Idéal de vrai pour les zones du dedans des conjonctions, disjonctions, implications et différences symétriques lorsqu'elles sont posées sur le papier. Une valeur de vrai vaut un, dedans, et pour le dehors vaut zéro. Une valeur de vrai, soit plein, est assigné au dedans, pour toujours, jamais vide.

La situation générale et l'évolution de ce moment dépréciatif est noté en plus et en moins par un circuit rigide, fini, une bonne machine à tout faire.

Est I, le référent, de n'importe quel connecteur de son affirmation et de sa négation. Haute valeur, de la négation de l'implication à la conjonction, se renforçant à nouveau vers la disjonction (barre de Scheffer), faible vérité que ces valeurs vraies d'équivalence avec vrai faible de l'intérieur du dedans, au dedans dominant.

Vide inexistant, soi disant, ailleurs.

Les valeurs de vérité par zones alors.

D'abord les conjonctions avec la négation de la disjonction : presque pas remplie, juste une zone. Vérité : vraie en zéro-zéro, faux ailleurs. Père tonnant ou débonnaire.

Puis la conjonction elle-même maintenant. Toujours aussi faible affirmation. Vérité : vrai en un-un, tournant faux ailleurs. Père tout-puissant, localement humilié.

Les négations d'implications maintenant. Restant peu recouvertes. Vérité : vraie en un-zéro ou en zéro-un, contraposées l'une de l'autre, duale de l'une puis négation de l'autre. Père engoncé.

L'affirmation maintenant, les variables elles-mêmes, un peu plus pleine alors. Vérité : vraie en un-zéro et un-un ou en

[1] - Pour la démonstration se reporter aux "Méthodes de logique" de W.O.QUINE.

zéro-un et un-un, symétriques à droite et à gauche dans les deux cas. Père dérisoire.

L'équivalence, curieuse égalité qui égalise les contraires aussi bien. Vérité : vrai en un-un et zéro-zéro. Père au ménage.

La différence symétrique avec les deux oreilles, c'est la somme. Vérité : vraie en zéro-un et un-zéro. Père en vadrouille, à la maison et grand trouble à l'intérieur du dedans.

Les négations, ne sont pas des variables cette fois, mais leurs contraires. Vérité : vraie en zéro-un et zéro-zéro ou en un-zéro et zéro-zéro. Père législateur ou qui s'en prévaut.

La disjonction, presque pleine puisque une zone de plus est couverte. Vérité : vraie en un-zéro, un-un et zéro-un. Père qui fait les lois ou pilier de la foi.

Les implications, plus couvertes mais dissymétriques. Vérité : vraie en zéro-zéro, un-zéro et un-un ou en un-un, zéro-un et zéro-zéro. Père parangon de l'intégrité ou de la dévotion.

La barre de Scheffer enfin, négation de la conjonction. Vérité: vraie en zéro-zéro, zéro-un et un-zéro. Père vertueux et virtuose.

La tautologie maintenant, pleine, le plein. Vérité : vraie partout que ce soit un-zéro et zéro-un, comme un-un et zéro-zéro. Mère agité, immodérée et belle.

...qu'est-ce que tu fais donc là-haut ?

Incidence de T_2 sur L_2

L'étude du logicien mathématicien, disions nous, vise, avec T_2, à réduire à un calcul le traitement de la vérité.

Il prend appui sur ces calculs mais, comme chez le mathématicien étudiant d'autres domaines, son souci principal ne se réduit pas à cela. Il y a toujours une différence entre calcul et discours.

Pourtant il est deux attitudes sensiblement différentes dans l'appréciation de cette construction. Nous pouvons les présenter en commentant les deux seuls caractères formels définis dans le registre du métalangage.

Nous faisons à partir d'ici un usage intensif des grandes lettres.

Nous avons déjà introduit un de ces caractères dans le métalangage L_{2+1}. Ce caractère s'écrit $\vdash$ et permet de marquer que la formule P est une thèse, $\vdash$ P. Son emploi nécessite donc T_2.

Nous ajoutons un caractère qui portent aussi sur les formules du premier registre L_2, donc qui s'écrit entre les lettres majuscules dans le second registre L_{2+1} et dépend de la qualité de thèse de certaines formules.

Ce second caractère propre au métalangage L_{2+1} s'écrit $\vdash\!\dashv$ et marque l'équivalence démontrable de deux formules P et Q,

$$P \vdash\!\dashv Q.$$

Il marque que l'expression bien formée (P⇔Q) est une thèse.

Il est remarquable que ceux qui l'emploie parle à son propos, à propos de la relation qu'il permet d'inscrire, d'équivalence tautologique, faisant ainsi référence à une considération sémantique, dans la mesure où nous parlons de thèses dans une perspective syntaxique et déductive et de tautologies dans une veine sémantique faisant référence à la validité, au valeurs de vérité, à la vérifonctionnalité.

Nous pourrions donc facilement, avec le premier caractère, faire l'économie de ce caractère et de toute référence à la validité, en écrivant à la place des séquences où il se trouve l'expressions ⊦(P⇔Q) qui écrit très bien l'équivalence en question.

Le caractère ⊦

La logique étudie avec T_2 les lois nécessaires du raisonnement correcte. Donnons un exemple.

Voici (¬pv(¬qvp)) qui peut être déduit à partir des axiomes par une dérivation employant les seuls principes déductifs.

Axiome	(lc 2)	⊦ (¬pv(qvp))	[voir annexe n°1].
Substitution	(pd 2)	⊦(¬ql q)(¬pv(qvp))	[voir annexe n°1].
Donne		⊦ (¬pv(¬qvp))	

C'est de manière exclusive dans le cas de tels énoncés que nous utilisons dans le métalangage le caractère ⊦ pour indiquer qu'ils sont nécessaires.

⊦ (¬pv(¬qvp))

Pour certains logiciens cette préoccupation de droit, isoler les lois logiques, est la seul chose à retenir de cette pratique, et il est juste de dire que c'est un grand succès que d'y être parvenu. Mais faire la différence entre le calcul et le discours, c'est à dire le langage, n'est pas tomber pour autant dans le psychologisme. Nous qualifions plutôt de logicisme l'attitude qui consiste à ne rien vouloir savoir du langage et de sa structure qui n'est pas seulement grammaticale..

Ainsi il n'est certes pas nécessaire d'introduire dans le métalangage un nouveau caractère pour désigner les antilogies, car l'emploi de la négation suffit à assurer cette fonction.

Dans le cas d'une antilogie P, il suffit d'écrire $\vdash \neg P$.

Voici un exemple $(p \wedge \neg p)$. Dans le métalangage nous rendons ce fait par l'expression suivante :

$$\vdash [\neg(p \wedge \neg p)]$$

Le caractère $\vdash\!\dashv$

De la même manière, il n'est pas nécessaire d'introduire dans le métalangage un nouveau caractère afin d'écrire que deux formules différentes entretiennent une relation d'équivalence déductible.

Nous venons de voir que pour inscrire cette relation d'équivalence il n'est pas nécessaire de recourir à l'expression de L_{2+1}

$$(P \vdash\!\dashv Q)$$

puisqu'elle résume $\vdash(P \Leftrightarrow Q)$.

Donnons ici aussi un exemple avec une formule équivalente à l'exemple $(\neg p \vee q)$, soit $((\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg r \vee r))$

Nous traduisons cette équivalence dans le métalangage par l'expression

$$[(\neg p \vee q)] \vdash\!\dashv [(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg r \vee r)]$$

qui réécrit l'expression suivante

$$\vdash [(\neg p \vee q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg r \vee r))]$$

Pourtant certains éprouvent la nécessité d'employer ce caractère pour traiter des formules de L_2, où nous voyons se refléter l'autre attitude, différente du logicisme, en logique mathématique, dont la question est de savoir, puisqu'elle ne relève pas du psychologisme, de ne s'occuper que de la matérialité des caractères mis en usage, en quoi elle ne se réfère pas non plus à l'aspect sémantique de la validité ni à la théorie des ensembles.

Cette seconde attitude peut paraître faire un saut dans les mathématiques en risquant de faire croire qu'elle se réfère à la théorie des ensembles qui n'est pas encore construite à cette étape de l'élaboration et qui n'est pas nécessité à ce degrés de formalisation.

A partir de T_2 adopté en logique, nous ne travaillons plus dans le langage L_2 mais dans le langage L^*_2 dont les formules représentent des classes d'équivalence de formules de L_2 pour la relation d'équivalence ($P \dashv\vdash Q$). Cette nuance est très importante. Elle se fait dans le métalangage, puisqu'elle repose déjà sur la démontrabilité définie par les déductions.

Mais parler de classes d'équivalence peut faire croire aux esprits pressés à un recours à la théorie des ensembles qui est le lieu le plus régulier de tel quotient . Or, précisément nous ne parlons ni d'ensemble mais de multiplicité de formules, ni d'ensemble quotient mais de classes d'équivalence.

Certes c'est ici que se produit le risque d'une assimilation trop hâtive qui négligerait la présence de T_2 entre L_2 et L^*_2.

II

LA VÉRITÉ DANS L_2,T_2.

Nous venons de distinguer entre deux attitudes en logique. Ces deux attitudes se distinguent l'une de l'autre, elles sont liées chacune à deux modalités de l'assimilation. Leur distinction est au principe de la distinction entre relations et fonctions dans le discours mathématique.

L'attitude logiciste qui se contente de réduire ce qui peut s'écrire du langage objet en logique à la multiplicité des formules isolées par T_2 parmi les formules de L_2. Nous parlerons à son propos de *l'écriture logique au sens strict* de la *vérité* ou *d'écriture nécessaire*, elle produit une assimilation que nous qualifions d'*assimilation secondaire* entre ce qui s'écrit et ce qui est démontrable comme nécessaire.

P équivaut à $\vdash$ P

Ce qui est une façon d'apprécier le fait qu'en logique et en mathématique nous n'écrivons que des thèses. (B.Rusell dit que nous ne traitons que de tautologie).

Le reste ne s'écrit pas et il n'y a pas lieu d'en faire état autrement que dans les étapes de la construction, étapes qui deviennent caduques (forcloses) une fois la construction achevée.

Nous relevions une attitude qui n'est ni ensembliste, ni sémantique, mais qui risque de tourner à la mathématique ensembliste ou de rester attaché à la validité, à vouloir continuer de considérer la construction dans son ensemble (usage non technique du terme d'ensemble) ou dans son étendue (métaphore ici). Elle est le lieu d'une assimilation que nous qualifions d'*assimilation première* et *syntaxique* du fait de *la relation d'équivalence produite par* T_2 *dans la multiplicité des formules de* L_2. Elle assimile plusieurs façon d'écrire l'affirmation comme par exemple la double négation très classique, du fait de la thèse,

$$\vdash [\neg\neg p \Leftrightarrow p)]$$

qui est une forme de l'assimilation dans le passage entre L_2 et T_2.

Il y a aussi comme assimilation de ce type, l'assimilation entre l'affirmation et la formule qui écrit l'équivalence entre cette affirmation et une quelconque thèse, ce qui est une façon d'apercevoir qu'en logique nous ne pouvons affirmer que des thèses.

$$\vdash [p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (\neg q \vee q))].$$

Mais il y a un troisième lieu dans l'usage des logiciens où l'assimilation est employée de façon courante. Où nous trouvons d'autre effet de l'assimilation dans la pratique et l'interprétation de la négation

Donnons un exemple extrait d'un ouvrage de logique[1].

"Dans un quelconque système standard [comme notre langage L_2 accompagné de la théorie T_2], nous trouvons les thèses :

$$(1)\ (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$$

$$(2)\ (\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q))$$

Le sens de (1) est souvent formulé en disant que si une proposition est vrai, une quelconque proposition l'implique; celui de (2) en disant que si une proposition est fausse, elle implique n'importe quelle proposition.

Ensemble, elles sont souvent appelées le paradoxe de l'implication (matérielle)."

Laissant pour l'instant le paradoxe de l'implication matérielle, qui pour nous, ne parait paradoxal que du seul fait de l'assimilation. Cette exemple nous intéresse d'abord ici pour le fait qui s'y trouve attesté, que (p) est lu par le logicien (p est une proposition vraie) et $(\neg p)$ s'entend en logique comme un (p est une proposition fausse)

. Il s'agit ici de l'effet de l'*assimilation primaire*, dans le registre de *la lecture de la lettre* pour certains logiciens (Wittgenstein) ou de *la vérité empirique*, supposée par

[1] - G.E.HUGHES et M.J. CRESSWELL. " An introduction to modal Logic". Methuen. Londres et New-York. 1968.

d'autres logicien (Austin, Popper) du fait de ce placer dans L_2 pourvu d'une interprétation sémantique définissant la validité dans une situation particulière.

p équivaut à "p est une proposition vraie"

Nous introduisons un nouveau caractère dans le métalangage, afin d'écrire cette interprétation,

$\vdash_s$ p écrit "p est une proposition vraie"

ce caractère ne s'écrit pas en logique classique de façon usuelle tant cette interprétation est courante sans qu'il paraisse utile de l'écrire, tant est évidente l'assimilation que nous relevons ici, haut lieu de faux problèmes.

Cette assimilation est produite par l'usage même de lettres comme p, q, r,... compte tenu de la manière dont le mathématicien les emploient. Cette assimilation est au principe de ce qui fait la difficulté de la notion de variables et de fonctions.

Il ne s'agit pas du même registre que dans ce qui précède. Or cette distinction n'est pas souvent faite ou insuffisamment commenté dans la présentation de la logique. C'est un premier point. Qu'il y ait dans ce cas, comme dans le précédent, un effet de l'assimilation posée d'emblée et non exprimée, c'est le second point.

Profitons de cet exemple pour préciser en quoi une doctrine de la négation est entièrement à faire, puisque une erreur est souvent commise du fait de l'oubli de la transparence de la vérité produite par l'assimilation, lorsque la négation est confondue dans l'interprétation par trop hâtive chez certains mathématiciens avec le complémentaire ensembliste (erreur dénoncée avec vigueur par Quine), alors qu'une conséquence des thèses précédente s'écrit

$$((p \Rightarrow (\neg p)) \vee ((\neg p) \Rightarrow p))$$

qui peut être interprétée, compte tenu de ce qui vient d'être dit, par l'expression

(Si p est vrai alors p est faux ou si p est faux alors p est vrai)

formule qui s'écrit de manière sténographique dans le métalangage

(Si $\vdash_s$ p alors $\vdash_s \neg$p ou si $\vdash_s \neg$p alors $\vdash_s$ p) aussi problématique pour l'idée que l'on se fait de la négation comme complément que pour la logique du vrai et du faux exclusif.

Afin de traité de l'assimilation effacée dans L_2,T_2, nous distinguons donc trois registres selon lesquels l'écriture d'un prédicat de vérité peut se diffracter et par conséquent trois registres où se produit l'assimilation.

0 - un *premier registre* originaire avec diverses formules de L_2 identifiées à l'affirmation p dans L_2,T_2, donne lieu à diverse formes d'un connecteur de vérité. Il s'agit d'abréviations dans la syntaxe, rendues futiles par la relation d'équivalence nécessaire.

1 - un *registre primaire* qui se traduit par le fait d'utiliser un caractère marquant les formules vraies en fonction des situations empiriques particulières qui se peuvent rencontrer. C'est usuellement ce que le lecteur entend par le fait d'écrire P.

La vérité empirique d'une proposition de L_2 s'écrit dans L_{2+1}:

$$\vdash_s P$$

2 - un *registre secondaire* qui se traduit par le fait d'utiliser un caractère qui marque les formules nécessairement vraies.

La vérité logique d'une proposition de L_2,T_2 s'écrit dans L_{2+1} :

$$\vdash P$$

Ces trois modes d'écriture de la vérité ne sont pas équivalents.

Seul la seconde distinction fait l'objet de la formalisation de l'assimilation que nous proposons maintenant.

Nous voulons montrer la caractère analytique, mais non strict, de l'assimilation (synthèse) posée d'emblée (a priori) plus ou moins bien exprimé depuis Parménide avec l'identité de la pensée et de l'être, ce qui justifie de maintenir la question de Kant relative aux jugement synthétique à priori, dans sa critique de la raison pure. Notre démonstration en subvertit les catégories et prouve la nécessité d'une révision déchirante accompagné de la reconnaissance de son registre propre. Elle ne relève pour nous d'aucune ontologie, puisque nous ne concidérons que l'usage des trois caratères

$$\vdash\!\dashv, \vdash_S \text{ et } \vdash.$$

C'est le passage de l'être à la lettre jamais accomplit avant Freud et souligné par Lacan. Il s'agit d'une sémiologie bien plutôt, ou sémiotique si l'on veut, encore à venir et ne nécessitant aucune transcendance, mais un sujet divisé par la matérialité évanescente de cette lettre.

Car il nous faut découvrir alors ce qui se passe, effectivement, c'est à dire du fait de l'effectuation de la démonstration. Analycité de l'évidence et de l'évidement qui donne raison à ce qui, de toujours, se fait en cette matière mais que personne n'a jamais montré ainsi dans sa nécessité imparable. Eclairant la structure du symptôme qui s'en déduit comme revendication de la vérité qui se rappelle à chacun.

Cette structure de la transparence fait unicité absolue de la vérité dans chaque cas où son évidence se rencontre. Elle produit l'effacement de la totalité de la vérité du fait d'être une structure de chute permanente et d'échec garanti. De ce fait la vérité n'est pas toute et ne peut être que mi-dite.

Cette démonstration qui vient maintenant constitue la construction principale de notre argumentation.

III

FORMALISATION DU METALANGAGE

Nous voulons construire le langage L_3 dont nous prenons l'existence au sérieux, comme métalangage L_{2+1} du calcul des propositions. Nous appellerons logique modifiée ce langage L_3, dans lequel nous développerons une théorie T_3 dont les conséquences iront bien au delà de la théorie de l'assimilation et de sa discussion.

Dans ce langage nous cherchons à intégrer le caractère

$$\vdash_s$$

marquant la vérité en situation, à la formalisation du métalangage L_{2+1}.

Nous aurions pu, bien sûr, opter pour d'autres types d'études:

- Soit que nous n'effectuions pas directement l'assimilation première, entre les différentes formules de l'affirmation, produites dans L_2 par la théorie T_2, en construisant une autre théorie T'_2 qui ne provoquerait pas la même équivalence entre les formules de L_2. Mais nous ne pourrions pas parler comme nous voulons le faire d'un dupliquât de la logique canonique plongé dans un métalangage, ce qu'il nous parait nécessaire de faire, avec la plus grande exactitude dans ce cas précis. Ceci pour montrer l'analyticité au sens kantien du caractère a priori de ces jugements synthètiques que son les assimilations au principes du langage et éclairer la structure du langage, en nous exerçant sur un cas d'espèce effectif, utilisé par ailleurs, par de nombreux logiciens. C'est la part que nous concédons au logicisme, sans aucune allègence idéologique ou aucune soumission à une langue de bois.

- Soit que nous déployons une formalisation de la nécessité comme le fait la logique modale. Or justement on ne nous a pas attendu pour cela et il ne semble pas, sous la multitude des systèmes construits depuis Lewis, que la théorie de la vérité en fut achevée pour autant.

En plus de ce fait,- ces différents types d'études ont déjà été largement développés -, il est à notre avis, quelque chose, dans ces tentatives qui reste toujours éludée et ratée. La permanence de se ratage devient le thème même de notre étude, parcequ'il caractérise la psychanalyse comme étant de Freud et fait la difficulté à le suivre et à se maintenir dans son ton pour ses élèves. Ce ratage assuré conduit au trait de structure que nous mettons à jour avec notre effectuation de l'assimilassion de la vérité empirique.

Il y a du métalangage

Nous apercevons[1] donc que tout discours, qui veut rendre compte de l'assimilation et par conséquence d'une certaine relation entre les formules du calcul des propositions elles-mêmes et les énoncés qui disent de ces formules qu'elles sont vraies dans une circonstance donnée, doit être formulé dans un métalangage qui, outre les termes logiques usuels, dispose des deux types d'expressions suivantes.

1- Des formules elles-mêmes en usage dans ce langage objet ou des transcriptions de ces formules du langage objet (afin d'éviter le piège de la traduction, le langage objet peut faire partie du métalangage). Dans le cas de notre construction, nous disposerons des deux possibilités.

Outre ce type élémentaire d'expressions, que nous savons déjà formaliser, il en existe donc un deuxième type.

2- Celles qui contiennent des termes qui dénotent les prédicats de vérité, par exemple, des prédicats comme "x est vrai dans la situation s" et les relations entre ces deux types fondamentaux d'expressions, comme des relations du genre de "(x est vrai dans la situation s) si et seulement si y" (ce

[1] - Ici nous suivons un moment l'argiumentation de K. POPPER dans son étude consacré à la vérité selon Tarki ("La connaissance objective", Aubier, Paris 1991), mais pour le quitter définitivement dans notre façon d'envisager notre construction puisque nous concluons , comme dans le cas de Austin à l'encontre de leur points de vu commun. L'avantage de notre présentation, reste que nous pouvons dire pourquoi, de manière effective.

deuxième type d'expressions est sémantique et d'un ordre plus élevé que le langage objet auquel elles se réfèrent, mais les termes qu'elles renferment, et par conséquent elles-mêmes, appartiennent à la morphologie, ou syntaxe, du métalangage).

Dans le cas de ce deuxième type de termes, nous n'aurons pas recours à un prédicat de vérité, mais à un opérateur, ou connecteur unaire de vérité. C'est le point le plus délicat de notre construction, et nous devons discuter dans quels cas il remplit sa fonction. Nous serons aidés dans cette tache du fait d'avoir pris soin de construire un parfait dupliquât syntaxique de notre langage objet, ce qui méritera d'être démontré.

Telles sont, cela va quasiment de soi, les deux exigences minimales auquel tout langage doit satisfaire, pour que nous puissions y formuler une théorie de l'assimilation.

La grandeur et l'audace de ce qu'a accompli Tarski, c'est d'avoir découvert cette double exigence minimale et d'avoir mis en lumière que les prédicats ou relations mentionnées en (2), celles qui relient les énoncés aux énoncés eux-mêmes, devaient dépasser, en un premier temps, pour des raisons essentielles, les moyens dont nous disposons dans le langage objet.

Il est clair qu'une fois que nous disposons de ces deux catégories d'expressions, nous sommes en mesure de faire dans le métalangage sémantique L_3 des assertions du genre :

P est vrai en s si et seulement si P.

Du fait des occurrences de la lettre P, cette phrase est écrite dans le métalangage L_{3+1} de la logique modifiée qui nous sert ici pour notre commentaire.

Si nous particularisons cette expression en l'énonçant pour une formule du langage L_2, ou de sa traduction dans L_3, en place de P, nous obtenons une formule du langage L_3.

Cet énoncé vient pour $(\Phi(a) \Leftrightarrow s)$ qui nous servait à formuler l'assimilation dans ce qui précède.

Nous supposons ici que la majuscule P de L_{3+1} indique la place d'une transcription dans notre construction L_3 d'une formule du langage objet L_2.

Nous sommes amenés à distinguer la transcription impropre de chaque formule P de L_2, nous la noterons dans

L_{3+1}: trans(P), et nous noterons L_{3-1} la multiplicité de ces formules transcrites dans L_3; de sa transcription propre, nous continuerons à la noter P dans L_{3+1}. La multiplicité de ces transcriptions propres sera toujours désignée L_2, parce que ce langage est contenu dans L_3 [voir annexe n°1].

Or nous proposons d'introduire un connecteur unaire de vérité que nous noterons $\vdash$ qui fait partie de la morphologie de notre langage L_3 et à partir d'ici nous utiliserons le caractère $\boldsymbol{\vdash}$ pour marquer dans L_{3+1} les thèses deT_2 et de T_3 aussi bien puisque L_2 est un sous langage de L_3 et que les thèses deT_2 sont des thèses de T_3 prises en tant que transcription propre. De même nous aurons recour au caractère suivant $\boldsymbol{\vdash\!\dashv}$ pour écrire dans L_{3+1} la relation d'équivalence démontrable par T_3.

Puis nous utiliserons le connecteur d'équivalence logique ($\Leftrightarrow$)[1] qui sera défini dans ce même langage L_3 afin d'écrire la relation d'équivalence (si et seulement si) du métalangage L_{2+1}.

Nous serons donc en mesure d'écrire explicitement dans notre langage L_3 les énoncés de la forme

$$\vdash \text{trans(P)} \Leftrightarrow \text{trans(P)}.$$

Du fait de l'emploi du foncteur trans( ), cet énoncé est encore ici donnée dans le métalangage L_{3+1} qui sert à notre commentaire, il est alors évident que c'est cela aussi que nous allons résoudre dans L_3.

Avant de discuter de la difficulté la plus criante que nous puissions rencontrer dans ce style d'étude, nous proposons de renvoyer le lecteur aux éléments explicites de notre construction [voir annexe n°1] et de n'en donner qu'un commentaire dans ce qui vient maintenant. La difficulté relative à l'intégration dans la syntaxe du métalangage de l'aspect sémantique du traitement de la vérité propre au langage objet nous fera approcher en acte d'une théorie de la lecture et de l'écriture.

Mais pour cela le lecteur devra d'abord pratiquer le calcul explicite, éprouver et vérifier le problème sémantique, et

---

[1] - Il faudra apprendre à lire en examinant avec attention la différence dans L_3 entre ce connecteur et le connecteur définit par trans(p$\Leftrightarrow$q) que nous noterons plus loin. $(\dot{\Leftrightarrow})$

apprécier les changements de registres nécessités par l'acte de lire, d'écrire donc de se relire.

Construisons maintenant le langage L_3 (L_{n+1}) et la théorie T_3 dans lequel nous développerons le commentaire du langage L_2 (L_n) et la théorie T_2 du calcul propositionnel de la logique canonique classique.

IV

LE LANGAGE DE LETTRES (LA LOGIQUE MODIFIÉE EN UNE TOPOLOGIE DU SUJET)

Nous construisons le langage L_3 et la théorie T_3 comme un double système formel, à la manière dont on procède pour le calcul canonique classique des propositions(voir appendice n°1 où les données supplémentaires, propres à la modification, sont écrites en caractères italiques).

Dans le premier système formel grammatical L_3, nous introduisons une négation d'un nouveau type : nous l'appellerons la négation modifiée.

En plus des lettres minuscules

p, q, r, s, t...

il y a donc trois caractères primitifs.

Deux négations qui seront interprétées comme des connecteurs unaires,

l'un s'écrit ¬, l'autre s'écrit ~.

La disjonction,

qui s'écrit ∨.

Cette seconde négation est la seule modification que nous introduisons en logique, mais elle suffit à notre propos. Ce matériau graphique est soumis à des principes formatifs qui sont au nombre de quatre, (voir appendice n°1)

Nous pouvons donc former des énoncés du type suivant:

$$p,\ q,\ (\neg p),\ ({\sim}p),\ (\neg({\sim}p)),\ ((\neg p)\vee q),\ (({\sim}p)\vee q),\ (\neg({\sim}(\neg p\vee q))),$$
$$(\neg(p\vee({\sim}p))),$$
$$(\neg((\neg(\neg{\sim}p\vee p))\vee(\neg({\sim}p\vee\neg p))))$$

Comme en logique classique nous introduisons des caractères abréviateurs [voir annexe n°1]. Voici des énoncés bien formés abrégés :

$$(p\wedge q),\ (p\Rightarrow q),\ (p\Leftrightarrow q),\ ((\neg p)\wedge(\neg(\sim p))),\ (p\Leftrightarrow(\sim p))$$

Nous ajoutons trois abréviations propres au langage L_3 de la logique modifiée. Ce sont deux opérateurs unaires de cette logique et un opérateur binaire.

Une seconde négation modifiée définie grâce à la première,

$$\overline{p} \underset{def}{=} (\neg(p\vee(\sim p))),$$

mais elle n'est en aucun cas une modification supplémentaire[1],

et un opérateur unaire qui est défini grâce aux deux négations modifiées par l'expression suivante:

$$\vdash p \underset{def}{=} (p\Leftrightarrow(\sim\overline{p})).$$

Puis un autre caractère abréviateur binaire de cette logique modifiée

$$(p \vdash\!\dashv q) \underset{def}{=} (\vdash (\sim\sim(p\Leftrightarrow q)\vee(\overline{p\Leftrightarrow q}))).$$

Il nous arrivera, à partir de maintenant, dans l'écriture de la logique modifiée, d'omettre certaines parenthèses, lorsque cette omission n'entraîne aucune ambiguïté. La double négation modifiée (~(~P)) s'écrira (~~P) et reflétera ainsi son aspect de connecteur unaire.

Nous construisons ensuite un second système formel T_3 afin de traiter de la déduction. C'est à dire de donner une version syntaxique de la circulation de la vérité dans ce langage. Les principes déductifs sont les mêmes que ceux de la logique canonique classique [voir annexe n°1 - troisième partie], et nous ajoutons aux axiomes de la logique classique,

[1] - Nous adopterons une écriture spécifique pour cette négation, lorsqu'elle nie une formule dont la longueur est plus importante. $(\overline{P}) =_{def} \bar{(}P\bar{)}$. Par exemple, $(\overline{R\vee Q})$, lorsque R désigne $(\neg((\neg(\sim p))\vee p))$ et Q désigne $(\neg((\sim p)\vee(\neg p)))$, s'écrit

$$\bar{(}(\neg((\neg(\sim p))\vee p))\vee(\neg((\sim p)\vee(\neg p)))\bar{)}.$$

De même, $(\overline{\neg Q})$, quand Q désigne $(\neg(\sim(\neg p\vee q)))$, s'écrit

$$\bar{(}\neg(\neg(\sim(\neg p\vee q)))\bar{)}.$$

un axiome[1] supplémentaire qui régit l'usage de la première négation modifiée :

$$\textbf{(lm 5)} : (\sim p \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow \neg q))$$

Dans sa version démonstrative, cette logique se révèle susceptible d'un traitement par double trivialisation [voir annexe n°3] qui fait bien apparaître qu'elle est en elle même une double logique classique qui nous servira ici comme métalangage de cette même logique canonique classique.

Grâce à ce procédé démonstratif, nous pouvons prouver la consistance, mais cette logique n'est pas complète[2] aux différents sens du terme qui ont été donnés [voir annexe n°1]. Nous aurons recourt, par conséquent, au caractère $\vdash$, afin d'indexer exclusivement les thèses du système T_3 dans le métalangage L_{3+1}.

Le lecteur peut utiliser lui-même le procédé de la double trivialisation [voir annexe n°3] pour démontrer que les formules de la logique modifiée que nous énumérons maintenant, et qui vont nous servir par la suite dans notre démonstration, sont bien des thèses de T_3.

Petit formulaire de topologie du sujet:

$$\textbf{(tm}_{\mathbf{1}}\textbf{)} - \vdash [\neg(\sim\sim p \vee \overline{p}) \Leftrightarrow (\sim\sim (\neg p) \vee \overline{\neg p})]$$

$$\textbf{(tm}_{\mathbf{2}}\textbf{)} - \vdash [(\sim\sim((\sim\sim p \vee \overline{p}) \vee (\sim\sim q \vee \overline{q}))) \Leftrightarrow (\sim\sim(p \vee q))]$$

$$\textbf{(tm}_{\mathbf{3}}\textbf{)} - \vdash [\overline{\overline{((\sim\sim p \vee \overline{p}) \wedge (\sim\sim q \vee \overline{q}))}} \Leftrightarrow \overline{(p \vee q)}]$$

---

[1] - Nous devons à A Van Belingen la formulation de cet axiome que nous adoptons volontiers ici. Dans son texte, il construit une méthode déductive propre à la logique modifiée dit principe de double trivialisation, que nous utiliserons dans nos démonstrations (voir sur ce point notre appendice n°3).

(Pdm_3): Si $(\sim \overline{p})$ alors $((\sim q \Leftrightarrow \neg q)$ et $(\neg \overline{q}))$ et si $(\neg\sim \overline{p})$ alors $((\neg\sim q)$ et $(\overline{q} \Leftrightarrow \neg q))$ et $(\sim \overline{p} \neq \neg\sim \overline{p})$

[2] - Une autre sorte de complétude peut être définie pour une interprétation sémantique particulière déterminant la validité de la logique ainsi modifiée. Cette interprétation présente un grand intérêt pour le discours analytique du fait qu'elle permet de fonder en raison le mathème A réputé connoter le grand Autre, lieu nécessité par la parole. De proposer en acte la barre porté sur cet Autre, soit $\square$, cette sémantique rend raison de la problématique qui commence ici de l'objet dans la psychanalyse. Objet fétiche, objet a, objet de la phobie, sous son aspect formel de lettre, dont le problème reste réel de son épreuve pour le corps.

$$\textbf{(tm}_4\textbf{)} - \vdash (\vdash (\sim\sim p \vee \bar{p}) \Leftrightarrow p)$$

$$\textbf{(tm}_5\textbf{)} - \vdash ((\vdash (\sim\sim p \vee \bar{p}) \Leftrightarrow (\sim\sim p \vee \bar{p})) \Leftrightarrow \sim\bar{p})$$

$$\textbf{(tm}_6\textbf{)} - \vdash (\sim\bar{p} \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow \neg\, q)),$$

$$\textbf{(tm}_7\textbf{)} - \vdash (\sim\bar{p} \Rightarrow ((\sim q \Leftrightarrow \neg\, q) \wedge \neg\, \bar{q})),$$

$$\textbf{(tm}_8\textbf{)} - \vdash (((\sim\sim p \vee \bar{p}) \Leftrightarrow \vdash \neg(\sim\sim p \vee \bar{p})) \Leftrightarrow (\overline{\sim p}\ ))$$

$$\textbf{(tm}_9\textbf{)} - \vdash (\overline{\sim p} \ \Leftrightarrow \neg(\sim\bar{p})).$$

$$\textbf{(tm}_{10}\textbf{)} - \vdash (((\sim\sim p \vee \bar{p}) \Leftrightarrow \vdash (\sim\sim p \vee \bar{p})) \Leftrightarrow (\neg((\sim\sim p \vee \bar{p}) \Leftrightarrow \vdash \neg(\sim\sim p \vee \bar{p})))).$$

$$\textbf{(tm}_{11}\textbf{)}{:}- \vdash ((\vdash (\sim\sim p \vee \bar{p}) \not\Leftrightarrow (\sim\sim p \vee \bar{p})) \Leftrightarrow (\overline{\sim p}\ ))$$

$$\textbf{(tm}_{12}\textbf{)} - \vdash (\ \overline{\sim p} \ \Rightarrow (\ (\bar{q} \Leftrightarrow \neg\, q) \wedge (\neg\sim q)\ )\ )$$

Après ce petit formulaire un peu aride nous revenons à notre sujet.

Dans ce métalangage L_3, nous pouvons faire la théorie de l'assimilation, c'est à dire commenter le traitement de la vérité dans la logique canonique classique L_2T_2.

Pour cela nous écrirons dans un langage L_{3-1} une théorie T_{3-1} lui correspondant comme un véritable dupliquât syntaxique, en un sens que nous préciserons cela donnera lieu à une démonstration. Nous ajouterons un axiome d'assimilation ($L_{as}6$) à la théorie T_3 de son métalangage. Cet axiome formulant l'assimilation sera exprimé dans le langage L_3.

Nous calculerons alors ce qui se passe à ce moment précis dans L_3, T_3 + ($L_{as}6$), pour conclure de la causalité du langage.

V

$L_{3\text{-}1}$ PLONGEMENT DE L_2 DANS L_3

Reprenons la conclusion à laquelle nous sommes arrêté. Nous formulons avec Tarski deux exigences minimales nécessaires à l'écriture de la théorie de l'assimilation dans un métalangage L_3, à propos de la théorie T_2 écrite dans le langage L_2.

En plus des principes logiques usuels, il nous faut disposer dans L_3:

1- des énoncés de L_2 eux-mêmes,

2- du terme qui écrit que tel énoncé de L_2 est vrai.

Commençons par le premier point. Afin de disposer dans L_3 des énoncés de L_2 eux-mêmes, nous transcrivons les énoncés de L_2 dans L_3 grâce au protocole de transcription suivant :

(Trans 0) : Si p est une lettre minuscule de L_2, nous la transcrivons $\dot{p} \underset{def}{=} (\sim\sim p \vee \bar{p})$ qui est une expression de L_3.

(Trans 1) : Si P est transcrit $\dot{P}$, alors $(\neg P)$ se transcrit $(\dot{\neg}\dot{P}) \underset{def}{=} (\neg\dot{P})$

(Trans 2) : Si P et Q sont transcrit $\dot{P}$ et $\dot{Q}$, alors $(P \vee Q)$ se transcrit

$$(\dot{P}\ \dot{\vee}\ \dot{Q}) \underset{def}{=} \left\lfloor \sim\sim(\dot{P} \vee \dot{Q}) \vee \overset{=}{(}\dot{P} \wedge \dot{Q}\overset{=}{)} \right\rfloor$$[1]

[1] - L'expression $\overset{=}{(}P\overset{=}{)}$ écrit l'expression $\bar{(}\bar{(}P\bar{)}\bar{)}$.

Cette transcription se fait selon l'analyse en arbre des énoncés de L_2 (voir annexe n°2) et donne lieu à une correspondance d'un quelconque énoncé P de L_2 à sa transcription impropre, qui est un énoncé $\dot{P}$ = trans.(P) de L_3.

Nous appelons transcription impropre la transposition textuelle obtenue grâce à ce protocole. Cette transcription impropre donne lieu à un énoncé abrégé $\dot{P}$ qui se présente comme la duplication textuelle de l'énoncé P dans laquelle les petites lettres et les connecteurs sont pourvu d'un point. Mais le protocole nous dit plus, puisqu'il définit l'expression explicite de cet énoncé $\dot{P}$, écrite avec des lettres et des connecteurs de L_3 où les points n'apparaissent plus.

Par exemple, l'énoncé: $(p \vee \neg q)$ devient: $(\dot{p}\ \dot{\vee}\ (\dot{\neg}\dot{q}))$
soit dans L_3 sans aucune abréviation:

$$\left[\sim\sim((\sim\sim p \vee \bar{p}) \vee (\neg(\sim\sim q \vee \bar{q}))) \vee \overline{\overline{((\sim\sim p \vee \bar{p}) \wedge (\neg(\sim\sim q \vee \bar{q})))}}\right]$$

Nous parlons dans ce cas, de transcriptions impropre, car il existe comme nous l'avons déjà précisé et construit [voir annexe n°1] dans L_3 une transcription propre P de chaque énoncé de L_2 Ou, pour le dire autrement, L_2 est contenu dans L_3.

Le lecteur peut se rendre compte maintenant de l'écart qu'il y a entre la transcription impropre qui vient d'être explicitée et la réécriture textuelle dans L_3 des énoncés de L_2, les petites lettres et les connecteurs ne présentant aucun point.

Nous commencerons par réduire cet écart grâce à une première démonstration à propos de L_3, car ce n'est pas à cette transcription propre que nous ferons jouer le rôle de l'utilisation dans L_3 des énoncés de L_2.

Nous appellerons $L_{3\text{-}1}$, la multiplicité d'énoncés obtenue grâce à la transcription impropre.

Cette situation est originale, car cela revient à dire que parmi les énoncés de L_3 nous retrouvons les énoncés de L_2 à plus d'un titre[1], du point de vue de la syntaxe. Mais quand est-

[1] - Nous aurions pu utiliser d'autres protocoles de transcription impropre, car il existe d'autres sous-langages de L_3 qui peuvent transcrire L_2 d'un

il du point de vu de la vérité, c'est à dire de la déduction, sans parler du point de vu sémantique.

Avant de poursuivre la construction et de répondre à ces questions, apportons une simplification à notre pratique du langage de $L_{3\text{-}1}$.

Simplification dans $L_{3\text{-}1}$ grâce à la déduction dans T_3.

Nous pouvons introduire ici une première démonstration afin de simplifier les énoncés. Il s'agira de montrer que si P est une formule de L_2, il peut se transcrire textuellement en $\dot{P}$ dans L_3, de telle manière que sa transcription selon le protocole proposé sera dans T_3 équivalente à une forme réduite. Cela revient à démontrer le théorème suivant.

Théorème 1: Pour toute formule P de L_2 nous pouvons déduire dans T_3 la thèse qui admet d'être abrégée en

$$\vdash [\dot{P} \Leftrightarrow (\sim\sim P \vee \overline{P})].$$

Ce sera notre première démonstration, et c'est notre premier point.

Première démonstration :

Nous le démontrons par récurrence sur la longueur des énoncés.

1.0. - La transcription de L_2 dans L_3 se fait selon l'analyse en arbre des énoncés de L_2 [voir annexe n°2] .

Nous appellerons longueur de l'énoncé le nombre d'étage qui apparaît dans cet arbre. Nous résumerons la situation en indexant les connecteurs de la formule analysée par le chiffre de l'étage où ils apparaissent. La longueur de l'énoncé est donner par le chiffre le plus élevé.

---

point de vue syntaxique et prêter à des interprétations sémantiques aisées à construire. En voici un parmi d'autres :

(Trans 0) : $\dot{p} \underset{def}{=} \sim\sim p$; (Trans 1) : $(\dot{\neg}\dot{P}) \underset{def}{=} (\sim \dot{P})$; (Trans 2) : $(\dot{P} \dot{\vee} \dot{Q}) \underset{def}{=} \left[\sim\sim (\dot{P} \vee \dot{Q})\right]$. Nous considérerons par la suite six présentation de L_2 dans L_3.

Donnons un exemple avec l'énoncé qui est abrégé en (p⇔q) soit :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} \neg & (& \neg & (& \neg & p & \vee & q &) & \vee & \neg & (& p & \vee & \neg & q &)) \\ 5 & & 3 & & 1 & 0 & 2 & 0 & & 4 & 3 & & 0 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

Cet énoncé est de longueur 5.

Nous démontrons par récurrence à partir de là notre théorème

1.1.- Au rang 0, les petites lettres p, q, r,... de L_2 sont transcrites $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, ..., ou $\dot{p} \underset{def}{=} (\sim\sim p \vee \overline{p})$ d'après **(Trans.0)**, le théorème est donc démontré à cet étage.

1.2.- Nous passons de l'étage 0 à l'étage 1 par **(Trans.1)** ou **(Trans.2)**.

1.2.a).- Or, trans.(¬p) s'écrit $\dot{\neg}\dot{p} \underset{def}{=} \neg\dot{p}$ d'après **(Trans.1)**. Ainsi trans.(¬p) $\underset{def}{=} (\neg(\sim\sim p \vee \overline{p})$, et nous disposons dans T_3 du théorème suivant

$$\textbf{(tm}_1\textbf{)} \vdash [\neg(\sim\sim p \vee \overline{p}) \Leftrightarrow (\sim\sim(\neg p) \vee \overline{\neg p})]$$

Donc Trans.(¬p)⇔ $(\sim\sim(\neg p) \vee \overline{\neg p})$. l'équivalence que nous démontrons par récurrence est vérifiée dans ce cas.

1.2.b).- Et, trans(p∨q) s'écrit $\dot{p}\dot{\vee}\dot{q} \underset{def}{=} [\sim\sim(\dot{p}\vee\dot{q}) \vee \overline{\overline{(\dot{p}\wedge\dot{q})}}]$, d'après **(Trans.2)**. Or nous disposons dans L_3 des thèses suivantes :

1.2.b).α.- Pour le premier termes de l'expression de trans(p∨q) nous avons:

$$\vdash [(\sim\sim(\dot{p}\vee\dot{q})) \Leftrightarrow (\sim\sim(p\vee q))]$$

du fait que cette expression s'écrit plus exactement:

$$\textbf{(tm}_2\textbf{)} \vdash [(\sim\sim((\sim\sim p \vee \overline{p})\vee(\sim\sim q \vee \overline{q}))) \Leftrightarrow (\sim\sim(p\vee q))]$$

1.2.b).β.- Pour le deuxième terme de l'expression de trans(p∨q) nous disposons de:

$$\vdash [\overline{\overline{(\dot{p}\wedge\dot{q})}} \Leftrightarrow \overline{(p \vee q)}]$$

qui s'écrit sans abréviation:

$$\textbf{(tm}_3\textbf{)} \vdash [\overline{\overline{((\sim\sim p \vee \overline{p}) \wedge (\sim\sim q \vee \overline{q}))}} \Leftrightarrow \overline{(p \vee q)}]$$

pour retrouver l'expression de

$$\text{trans}(p\vee q) \Leftrightarrow [(\sim\sim p\vee q) \vee \overline{(p \vee q)})]$$

l'équivalence que nous voulons démontrer est aussi vérifiée dans ce cas.

Ceci achève la démonstration du début de la récurrence.

1.3.- Si au rang n trans.(P)=($\sim\sim P \vee \overline{P}$), comme nous ne passons du rang n au rang n+1 que par **(Trans.1)** ou par **(Trans.2)** en vertu des deux thèses précédemment utilisés et du principe de substitution, nous sommes assurés que notre théorème est démontré

N.T.E.D.

A partir d'ici, nos démonstrations vont être simplifiée grâce à ce théorème.

Nous insisterons encore sur le fait que $\dot{P}$ dans sa formulation abrégée, c'est P avec des points sur chaques lettres minuscules et chaques connecteurs, ce qui nous assure avec L_{3-1} une parfaite duplication de la syntaxe du calcul propositionnel classique L_2.

Or $\dot{P}$ étant de fait une expression de L_3, il nous faut considérer la portée de vérité donner à un tel énoncé par T_3, ou d'autres équivalences significatives produites par cette théorie écrite avec L_3.

Dans ces conditions, nous voulons aussi nous assuré, que nous disposons bien, avec ce plongement L_{3-1}, sous son aspect logique, par exemple avec une théorie T_{3-1}, d'une parfaite duplication du calcul des propositions de la logique canonique classique.

D'autre part, n'oublions pas que nous cherchons à formaliser dans L_3,T_3 l'emploi de l'opérateur de vérité empirique de L_{2+1}

Passons donc maintenant à l'écriture de la vérité dans ces données.